L'exercice I est indépendant du problème

Les parties II et III du problème sont indépendantes l'une de l'autre.

I

Exercice

Théorème d'Abel.

Etant donné une série numérique de terme général u_n (respectivement v_n), pour tout entier naturel n , on notera

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k \qquad \text{(respectivement } V_n = \sum_{k=0}^{k=n} v_k \text{)}$$

1.1 On suppose que le terme général u_n d'une série numérique réelle s'écrit $u_n = \varepsilon_n v_n$ avec

(i) : ε_n terme général d'une suite réelle, positive, décroissante, qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini

(i i) : il existe un réel M tel que, quel que soit n entier naturel, on ait : $|V_n| \leq M$

Montrer que : $U_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n$

(On dit alors que l'on applique la "transformation d'Abel" à la série de terme général u_n)

1.2 On pose $w_k = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k$

Montrer que la série de terme général w_k est absolument convergente.

1.3 En déduire la nature de la série de terme général u_n

1.4 Application : étudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin n\alpha}{4n+1}$ où α est élément de $]\,0\,;2\,\pi\,[$.

page 366 42 -1992-
E. N. S. A. I. T math 1

Problème

II

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la série entière de terme général

$$u_n(x) = \frac{x^n}{n(n-1)}$$

On notera f sa somme quand elle converge

2.1

2.1.1 Déterminer le rayon de convergence R.
2.1.2 La série converge-t-elle pour $x = R$? pour $x = -R$?

2.2 Montrer que f est continue sur $[-R, R]$, deux fois dérivable sur $]-R\,;\,R[$.

2.3 Calculer $f''(x)$ et en déduire $f(x)$.

2.4 Calculer $S_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ et $S_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$

III

Pour n entier naturel, on considère la série entière de terme général $u_n(x) = \frac{x^n}{4n-1}$

On notera f sa somme quand elle converge

3.1

3.1.1 Déterminer le rayon de convergence R.
3.1.2 La série converge-t-elle pour $x = R$? pour $x = -R$?

3.2 Pour x élément de $]0\,;\,R[$, on pose $x = t^4$ et $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{4n-1}}{4n-1}$

3.2.1 Etudier la dérivabilité de g et montrer que, lorsque g est dérivable,

$$g'(t) = \frac{at^2 + b}{1 - t^4}$$ où a et b sont deux constantes que l'on déterminera.

3.2.2 Calculer $g(t)$.

3.2.3 En déduire $f(x)$ pour x élément de $]0\,;\,R[$.

3.3 Par une méthode analogue à celle du 3.2 déterminer $f(x)$ pour x élément de $]-R\,;\,0[$.

3.4

3.4.1 Etudier la continuité de f sur $[-R\,;\,R[$.

3.4.2 Calculer $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n-1}$